TD Maple 1

1 Exercice

On cherche à déterminer, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, à quelle condition l'intégrale

$$I_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^2-2t\cos\alpha+1)}$$

existe et, le cas échéant, à la calculer.

1. Traiter à la main la question de l'intégrabilité (Maple n'est pas très utile ici...).

2. On suppose désormais que α est tel que l'intégrale existe. Quel est le cas particulier à étudier ? Demander à Maple de calculer l'intégrale dans ce cas.

3. On suppose enfin que α est différent de la valeur particulière déterminée à la question précédente. Demander à Maple la décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples (`convert(F,parfrac,t)`), intégrer de $-x$ à x et passer à la limite. Que dire du cas particulier précédent ?

2 Interpolation de Lagrange et phénomène de Runge

2.1 Interpolation en des abscisses équiréparties

On considère une fonction f, définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On veut comparer cette fonction f à son polynôme d'interpolation de Lagrange aux $n+1$ points $x_0,\dots,x_n$ de la subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles. Pour cela, on écrira une procédure `Lagrange`, qui prendra en paramètre la fonction$f$, les deux nombres a et b et l'entier n, et qui retournera la *fonction* définie par le polynôme d'interpolation qui prend les mêmes valeurs que la fonction f aux abscisses x_k.
Indications :
– *Utiliser la commande* `seq` *pour créer la* liste *des abscisses d'interpolation*
– *Utiliser ensuite* `map` *pour créer la liste des ordonnées.*
– *Utiliser* `interp` *pour le polynôme interpolateur.*
– *Utiliser enfin* `unapply` *et non la syntaxe* `->` *pour créer une fonction (explication en TD).*
Faire ensuite des essais pour la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. On s'intéressera aux intervalles $[-1,1]$ et $[-4,4]$. Pour évaluer la qualité de l'approximation, on représentera sur un même dessin la fonction f et son polynôme interpolateur, pour différentes valeurs de n.
Le phénomène bizarre qui se produit s'appelle phénomène de Runge.

2.2 Interpolation aux abscisses de Chebychev

Comme le problème se situe sur les bords de l'intervalle, on va chercher à déplacer les points de la subdivision pour en avoir davantage aux extrémités. Lorsque l'intervalle est $[a,b]=[-1,1]$, on choisit les $n+1$ points de Chebychev :

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}, \qquad k \in [\![0,n]\!]$$

(ce sont les $n+1$ racines du $n+1$-ème polynôme de Chebychev T_{n+1} ; celui qui vérifie $T_{n+1}(\cos x) = \cos(n+1)x)$. Lorsque l'intervalle est $[a,b]$ quelconque, on utilise une transformation affine pour transformer ces abscisses de Chebychev en des points de l'intervalle $[a,b]$; on s'intéresse donc aux abscisses

$$x_k = ???, \qquad k \in [\![0,n]\!].$$

Créer maintenant une procédure `Chebychev`, toujours avec les paramètres f, a, b et n, retournant le polynôme interpolateur en ces nouvelles abscisses. Reprendre les expériences précédentes, en ajoutant cette fois-ci ce nouveau polynôme sur le dessin. Attention ! L'expression exacte des points de Chebychev étant lourde, il faudra demander explicitement une évaluation numérique pour faire les calculs.
Remarque : on démontre que, dès que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, ces polynômes interpolateurs aux abscisses de Chebychev *convergent uniformément vers f sur $[a,b]$.*

3 Calcul explicite du polynôme d'interpolation

Nous avons jusqu'à présent utilisé la fonction prédéfinie de Maple pour calculer des polynômes d'interpolation de Lagrange. Nous cherchons maintenant à écrire une procédure calculant ces polynômes.
Pour cela, considérons le polynôme P d'interpolation de Lagrange aux abscisses $x_1, \dots, x_n$ et ordonnées $y_1, \dots, y_n$. Le polynôme $P - y_1$ s'annule en x_1, donc est divisible par $X - x_1$. Notons Q le quotient, de façon à avoir la relation

$$P = y_1 + (X - x_1)Q.$$

Si l'on sait calculer Q, on sait aussi calculer P. Or Q est lui aussi un polynôme d'interpolation : aux abscisses x_k ($2 \leqslant k \leqslant n$), il prend la valeur $z_k =$???
Cet algorithme conduit à obtenir le polynôme P sous la forme

$$P = \lambda_0 + \lambda_1(X - x_1) + \lambda_2(X - x_1)(X - x_2) + \cdots + \lambda_{n-1}(X - x_1)\cdots(X - x_{n-1})$$

(c'est la forme de Newton du polynôme d'interpolation).
Écrire une procédure `interpo` récursive à trois paramètres : les listes `x`, `y` et la variable `t`, calculant le polynôme d'interpolation associé aux deux listes, en l'indéterminée `t`.